Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

9-лекция. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель лекции – изучение численных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках курса студенты освоят метод коллокации, метод наименьших квадратов и метод Галеркина, приобретут навыки построения аппроксимационных схем, анализа их точности, устойчивости и сходимости, а также научатся применять эти методы для решения практических задач математической физики и инженерии.

План лекции:

1 Метод коллокации

Изложенный выше метод конечных разностей для решения краевых задач носит численный характер и позволяет получить таблицу значений искомой функции. Сейчас рассмотрим метод, дающий возможность найти приближенное решение краевой задачи в виде аналитического выражения.

Пусть требуется определить функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую линейному дифференциальному уравнению

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1.1}$$

и линейным краевым условиям

$$\Gamma_a[y] = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A, \quad \Gamma_b[y] = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B, \tag{1.2}$$

где $\alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2 \neq 0$.

Выберем некоторую совокупность линейно независимых функций (базисные функции)

$$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x), \tag{1.3}$$

где функция $u_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B, \tag{1.4}$$

а остальные функции $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют соответствующим однородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_i] = 0, \quad \Gamma_b[u_i] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Если краевые условия (1.2) однородны ($A = B = 0$), то можно положить $u_0(x) = 0$ и рассматривать лишь систему функций $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем искать приближенное решение краевой задачи (1.1)–(1.2) в виде линейной комбинации базисных функций:

$$y \approx u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x), \tag{1.6}$$

где c_i — неизвестные коэффициенты. Очевидно, что функция y удовлетворяет краевым условиям (1.2). В самом деле, в силу линейности краевых условий имеем

$$\Gamma_a[y] = \Gamma_a[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i \Gamma_a[u_i] = A + 0 = A,$$

$$\Gamma_b[y] = \Gamma_b[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i \Gamma_b[u_i] = B + 0 = B.$$

Подставляя выражение (1.6) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем остаток:

$$R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = L[y] - f(x) = L\Big[u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x)\Big] - f(x) = L[u_0](x) - f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i L[u_i](x), \tag{1.7}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Если при некотором выборе коэффициентов C_i выполнено равенство

$$R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \quad \text{при } a \le x \le b,$$

то функция y является точным решением краевой задачи (1.1)–(1.2). Однако подобрать такие коэффициенты практически невозможно. Поэтому ограничиваются тем, чтобы функция $R(x, C_1, \ldots, C_n)$ обращалась в нуль в заданной достаточно густой системе точек $x_1, x_2, \ldots, x_m \in (a, b]$ — точках коллокации, в которых дифференциальное уравнение (1.1) будет выполнено точно. В качестве точек коллокации, например, выбирают точки, делящие отрезок $[a, b]$ на равные части. В результате получаем систему линейных уравнений:

$$R(x_1, C_1, \ldots, C_n) = 0, \quad R(x_2, C_1, \ldots, C_n) = 0, \ldots \tag{1.8}$$

Из системы (1.8) в случае её совместности обычным способом определяют коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$, после чего приближенное решение краевой задачи дается формулой (1.6).

Пример. Решить методом коллокации краевую задачу [1]:

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0, \quad y(\pm 1) = 0. \tag{1.9}$$

Решение. В качестве базисных функций выберем полиномы

$$u_n(x) = x^2 - 3(1 - x^2), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

очевидно, удовлетворяющие краевым условиям $u_n(\pm 1) = 0$. За точки коллокации возьмем $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$. Ограничиваясь двумя базисными функциями, положим

$$y \approx C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4).$$

Подстановка в дифференциальное уравнение (1.9) даёт:

$$R(x) = -2C_1 + C_2(2 - 12x^2) + (1 + x^2)[C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4)] + 1. \tag{1.10}$$

В точках коллокации $x_0 = 0$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ имеем $R(x_0) = 0$, $R(x_1) = 0$. Отсюда получается система линейных уравнений для определения коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} -C_1 + 2C_2 = 0, \\ \text{(второе уравнение из } R(x_1) = 0\text{)} \end{cases} \tag{1.11}$$

Решив систему, находим $C_1 = 0.957$, $C_2 = 0.022$. Следовательно, приближенное решение:

$$y(x) \approx 0.957(1 - x^2) + 0.022(x^2 - x^4).$$

Итак, получаем приближенное решение методом коллокации:

$$y(x) \approx 0.957(1 - x^2) - 0.022(x^2 - x^4) = 0.957 - 0.979x^2 + 0.022x^4. \tag{1.12}$$

В частности, имеем

$$y(0) \approx 0.957.$$

Для сравнения приводим соответствующее значение $y(0)$, полученное методом конечных разностей (см. 8-лекция):

$$y(0) = y_0 \approx 0.967.$$

2 Метод наименьших квадратов

Снова рассмотрим краевую задачу

$$L[y] = f(x), \quad \Gamma_a[y] = A, \quad \Gamma_b[y] = B, \tag{2.1}$$

где смысл сокращённых обозначений был установлен в предыдущем параграфе.

Придерживаясь обозначений в разделе 1, положим

$$y \approx u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x), \tag{2.2}$$

где функции $u_0(x)$ и $u_i(x)$ таковы, что

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B, \quad \Gamma_a[u_i] = 0, \quad \Gamma_b[u_i] = 0, \quad i > 0.$$

Подставляя выражение (2.2) в дифференциальное уравнение (2.1), получаем невязку:

$$R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = L\Big[u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x)\Big] - f(x) = L[u_0](x) - f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i L[u_i](x), \tag{2.3}$$

которую необходимо сделать как можно меньше по абсолютной величине на интервале $[a, b]$. Для этого вводят функционал

$$J(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \int_a^b R^2(x, C_1, \ldots, C_n)\, dx \to \min, \tag{2.4}$$

что и является интегральным методом наименьших квадратов. Условие минимума функционала J даёт систему уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial C_j} = 2\int_a^b R(x, C_1, \ldots, C_n) L[u_j](x)\, dx = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.5}$$

В результате получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, из которой определяются эти коэффициенты.

Пример. Решить интегральным методом наименьших квадратов краевую задачу, разобранную в разделе 1:

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0, \quad y(\pm 1) = 0. \tag{2.6}$$

Решение. Полагаем в качестве базисных функций:

$$u_1(x) = 1 - x^2, \quad u_2(x) = x^2 - x^4.$$

Тогда приближенное решение записываем в виде:

$$y(x) \approx C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4). \tag{2.7}$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, получаем невязку (см. формулу (1.10)):

$$R(x) = 1 - (1 + x^4)C_1 + (2 - 11x^2 - x^8)C_2. \tag{2.8}$$

Ввиду симметрии задачи достаточно рассматривать отрезок $[0, 1]$. Согласно интегральному методу наименьших квадратов, составляем функционал

$$J(C_1, C_2) = \int_0^1 R^2(x)\, dx \to \min \tag{2.9}$$

и подбираем коэффициенты C_1 и C_2 так, чтобы интеграл имел наименьшее значение. Это даёт систему уравнений:

$$\int_0^1 (1 - x^4)\, R(x)\, dx = 0, \quad \int_0^1 (2 - 11x^2 - x^6)\, R(x)\, dx = 0. \tag{2.10}$$

Решая эту систему, получаем:

$$C_1 \approx 0.985, \quad C_2 \approx -0.078.$$

Следовательно, приближённое решение:

$$y(x) \approx 0.985(1 - x^2) - 0.078(x^2 - x^4). \tag{2.11}$$

В частности $y(0) \approx 0.985$ (для сравнения см. в разделе 1).

3 Метод Галеркина

Метод Галеркина основан на одной теореме из теории общих рядов Фурье.

Теорема 3.1. Пусть $\{u_n(x)\}$ — полная система функций с ненулевой нормой, ортогональных на отрезке $[a, b]$. Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна на отрезке $[a, b]$ ко всем функциям $u_n(x)$, т.е.

$$\int_a^b f(x) u_n(x)\, dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

то

$$f(x) = 0 \quad \text{при } a < x < b. \tag{3.2}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)$ относительно заданной системы ортогональных функций:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(x), \tag{3.3}$$

где коэффициенты Фурье определяются формулой

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x) u_n(x)\,dx}{\int_a^b [u_n(x)]^2\,dx}, \quad \|u_n\|^2 = \int_a^b [u_n(x)]^2\,dx > 0. \tag{3.4}$$

В силу условия (3.1) имеем

$$C_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Для полной системы $\{u_n(x)\}$ по отношению к любой непрерывной функции $f(x)$ выполнено равенство полноты:

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \|u_n\|^2. \tag{3.6}$$

Отсюда, учитывая равенство (3.3), получаем:

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0, \tag{3.7}$$

и, следовательно,

$$f(x) = 0 \quad \text{при } a < x < b. \tag{3.8}$$

□

Замечание 3.1. Из формулы (3.4) вытекает, что если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна конечной системе функций $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x)$ (т.е. $C_0 = C_1 = \cdots = C_N = 0$), то

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \approx \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n^2 \|u_n\|^2,$$

и при достаточно большом N интеграл будет мал. В этом случае функция $f(x)$ в среднем на отрезке $[a, b]$ будет сколь угодно мала. При дополнительных ограничениях отсюда следует, что $|f(x)|$ также мала на всём отрезке $[a, b]$.

Перейдём теперь к изложению метода Галеркина. Пусть имеется линейная краевая задача

$$L[y] = f(x), \tag{3.9}$$

где

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y,$$

при наличии линейных краевых условий

$$\Gamma_a[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \Gamma_b[y] = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{3.10}$$

где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$. Выберем конечную систему базисных функций $\{u_i(x)\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, составляющую часть некоторой полной системы, причём функция $u_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B,$$

а функции $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют однородным краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_i] = 0, \quad \Gamma_b[u_i] = 0.$$

Приближенное решение краевой задачи (3.5)–(3.7) ищем в виде:

$$y(x) \approx u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x), \tag{3.11}$$

где C_i — неизвестные коэффициенты. При таком подборе базисных функций $u_i(x)$ функция $y(x)$, определяемая формулой (3.7), очевидно удовлетворяет краевым условиям (3.6) при любом выборе коэффициентов C_i. Подставив выражение (3.7) в дифференциальное уравнение (3.5), получаем невязку:

$$R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = L\Big[u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x)\Big] - f(x) = L[u_0](x) - f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i L[u_i](x). \tag{3.12}$$

Для точного решения краевой задачи функция $R(x) = 0$; поэтому для получения приближённого решения, близкого к точному, необходимо подобрать коэффициенты C_i так, чтобы функция $R(x)$ была «малой» в некотором смысле. Согласно методу Галеркина, требуется, чтобы невязка $R(x)$ была ортогональна базисным функциям $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. При достаточно большом числе этих функций, в силу приведённого выше замечания, это обеспечивает малость невязки в среднем. Насколько это приближённое решение близко к точному, в общем случае остаётся открытым вопросом. Таким образом, для определения коэффициентов C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ получаем систему линейных уравнений:

$$\int_a^b u_1(x) R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\, dx = 0, \tag{3.13}$$

$$\int_a^b u_2(x) R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\, dx = 0, \tag{3.14}$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b u_n(x) R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\, dx = 0, \tag{3.15}$$

или, более подробно,

$$\int_a^b L[u_i](x)\, dx = \int_a^b u_i(x) \left[f(x) - L\Big[u_0(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(x)\Big] \right] dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Достаточные условия сходимости метода Галеркина приведены в книге Михлина [4].

Пример. Методом Галеркина найти приближённое решение уравнения

$$y'' + xy + y = 2x, \tag{3.17}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0. \tag{3.18}$$

Решение. В качестве системы базисных функций $u_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ выбираем:

$$u_0(x) = 1 - x, \quad u_1(x) = x(1-x), \quad u_2(x) = x^2(1-x), \quad u_3(x) = x^3(1-x).$$

Приближённое решение ищем в виде:

$$y(x) \approx u_0(x) + C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + C_3u_3(x) = (1-x) + C_1x(1-x) + C_2x^2(1-x) + C_3x^3(1-x). \tag{3.19}$$

Подставляя $y(x)$ в левую часть дифференциального уравнения (3.8), получаем невязку:

$$\begin{aligned} R(x, C_1, C_2, C_3) = (1 - 4x) + C_1(-2 + 2x - 3x^2) \\ + C_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + C_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Условия ортогональности функции $R(x, C_1, C_2, C_3)$ к базисным функциям $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ приводят к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - x^2)\, R(x, C_1, C_2, C_3)\, dx = 0, \\ \int_0^1 (x^2 - x^3)\, R(x, C_1, C_2, C_3)\, dx = 0, \\ \int_0^1 (x^3 - x^4)\, R(x, C_1, C_2, C_3)\, dx = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Подставляя вместо $R(x)$ его значение (см. формулу (1.10)) и выполняя интегрирование, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 133C_1 + 63C_2 + 36C_3 = -70, \\ 140C_1 + 108C_2 + 79C_3 = -98, \\ 264C_1 + 252C_2 + 211C_3 = -210. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Решая эту систему, получаем:

$$C_1 \approx -0.2090, \quad C_2 \approx -0.7894, \quad C_3 \approx 0.2090.$$

Следовательно, приближённое решение задачи:

$$y(x) \approx (1-x)\big(1 - 0.2090x - 0.7894x^2 + 0.2090x^3\big). \tag{3.23}$$

4 Контрольные вопросы

1. Что такое краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения? Приведите пример.
2. В чём заключается суть метода коллокации для решения краевых задач?
3. Как выбираются точки коллокации, и какое влияние это оказывает на точность метода?
4. В чём принцип метода наименьших квадратов при аппроксимации решения?
5. Как формулируется функционал для метода Галеркина и как выбираются тестовые функции?
6. Какие условия должны выполняться для сходимости метода Галеркина?
7. В чём отличие методов коллокации и Галеркина по выбору аппроксимационных и тестовых функций?
8. Какие критерии точности и устойчивости применяются при численных решениях краевых задач?
9. Приведите пример практической задачи, где эффективно применяются методы коллокации, наименьших квадратов или Галеркина.

5 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–8].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Collatz, C. 1953. Chislennye Metody Resheniya Differentsial'nykh Uravneniy. Moscow: IL, Chapter II.

[2] Milne, W. E. 1955. Chislennoye Resheniye Differentsial'nykh Uravneniy. Moscow: IL, Chapter VII.

[3] Elsgolts, L. E. 1954. Variatsionnoe Ischislenie. Moscow: Gostekhizdat.

[4] Mikhlin, S. G. 1957. Variatsionnye Metody v Matematicheskoy Fizike. Moscow: Gostekhizdat, Chapters III, V, IX.

[5] Tolstov, G. P. 1960. Ryady Fur'e. 2nd ed. Moscow: Fizmatgiz, Chapter II.

[6] Polozhiy, G. N., et al. 1960. Matematicheskiy Praktikum. Moscow: Fizmatgiz.

[7] Lokutsievsky, O. V. 1956. "Uspekhi Matematicheskikh Nauk." 11, no. 3 (69).

[8] Lance, J. N. 1962. Chislennye Metody dlya Byistrodeystvuyushchikh Vycheslitel'nykh Mashin. Moscow: IL.